

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Elementi di analisi delle matrici</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Spazi vettoriali . . . . .   | 1         |
| 1.2 Matrici . . . . .  | 3         |
| 1.3 Operazioni su matrici . . . . .  | 4         |
| 1.3.1 Inversa di una matrice . . . . .   | 6         |
| 1.3.2 Matrici e trasformazioni lineari . . . . .                                       | 7         |
| 1.4 Traccia e determinante . . . . .   | 7         |
| 1.5 Rango e nucleo di una matrice . . . . .  | 8         |
| 1.6 Matrici di forma particolare . . . . .   | 9         |
| 1.6.1 Matrici diagonali a blocchi . . . . .  | 9         |
| 1.6.2 Matrici trapezoidali e triangolari . . . . .                                     | 10        |
| 1.6.3 Matrici a banda . . . . .  | 10        |
| 1.7 Autovalori e autovettori . . . . .   | 11        |
| 1.8 Trasformazioni per similitudine . . . . .  | 13        |
| 1.9 La decomposizione in valori singolari (SVD) . . . . .                              | 16        |
| 1.10 Prodotto scalare e norme in spazi vettoriali . . . . .                            | 17        |
| 1.11 Norme matriciali . . . . .  | 20        |
| 1.11.1 Relazione tra norme e raggio spettrale di una<br>matrice . . . . .              | 24        |
| 1.11.2 Successioni e serie di matrici . . . . .  | 25        |
| 1.12 Matrici definite positive, matrici a dominanza diagonale e<br>M-matrici . . . . . | 27        |
| 1.13 Esercizi . . . . .  | 29        |
| <b>2. I fondamenti della matematica numerica</b>                                       | <b>33</b> |
| 2.1 Buona posizione e numero di condizionamento di un<br>problema . . . . .            | 33        |
| 2.2 Stabilità di metodi numerici . . . . .   | 37        |
| 2.2.1 Le relazioni tra stabilità e convergenza . . . . .                               | 41        |
| 2.3 Analisi a priori e a posteriori . . . . .  | 42        |
| 2.4 Sorgenti di errore nei modelli computazionali . . . . .                            | 44        |
| 2.5 Rappresentazione dei numeri sul calcolatore . . . . .                              | 46        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 2.5.1     | Il sistema posizionale . . . . .  | 46        |
| 2.5.2     | Il sistema dei numeri floating-point . . . . .  | 47        |
| 2.5.3     | Distribuzione dei numeri floating-point . . . . .                                     | 50        |
| 2.5.4     | Aritmetica IEC/IEEE . . . . .   | 51        |
| 2.5.5     | Arrotondamento di un numero reale nella sua<br>rappresentazione di macchina . . . . . | 52        |
| 2.5.6     | Operazioni di macchina effettuate in virgola mobile . . . . .                         | 53        |
| 2.6       | Esercizi . . . . .  | 56        |
| <b>3.</b> | <b>Risoluzione di sistemi lineari con metodi diretti</b>                              | <b>59</b> |
| 3.1       | Analisi di stabilità per sistemi lineari . . . . .                                    | 60        |
| 3.1.1     | Il numero di condizionamento di una matrice . . . . .                                 | 60        |
| 3.1.2     | Analisi a priori in avanti . . . . .  | 62        |
| 3.1.3     | Analisi a priori all'indietro . . . . .   | 64        |
| 3.1.4     | Analisi a posteriori . . . . .  | 65        |
| 3.2       | Risoluzione di sistemi triangolari . . . . .  | 66        |
| 3.2.1     | Aspetti implementativi dei metodi delle sostituzioni . . . . .                        | 67        |
| 3.2.2     | Analisi degli errori di arrotondamento . . . . .                                      | 69        |
| 3.2.3     | Calcolo dell'inversa di una matrice triangolare . . . . .                             | 70        |
| 3.3       | Il metodo di eliminazione gaussiana (MEG) e la<br>fattorizzazione LU . . . . .        | 71        |
| 3.3.1     | Il MEG interpretato come metodo di fattorizzazione . . . . .                          | 74        |
| 3.3.2     | L'effetto degli errori di arrotondamento . . . . .                                    | 77        |
| 3.3.3     | Aspetti implementativi della fattorizzazione LU . . . . .                             | 78        |
| 3.3.4     | Forme compatte di fattorizzazione . . . . .   | 79        |
| 3.4       | Altri tipi di fattorizzazione . . . . .   | 81        |
| 3.4.1     | Fattorizzazione $LDM^T$ . . . . .   | 81        |
| 3.4.2     | Matrici simmetriche e definite positive:<br>fattorizzazione di Cholesky . . . . .     | 82        |
| 3.4.3     | Matrici rettangolari: fattorizzazione QR . . . . .                                    | 84        |
| 3.5       | Pivoting . . . . .  | 88        |
| 3.6       | Il calcolo dell'inversa . . . . .   | 93        |
| 3.7       | Sistemi a banda . . . . .   | 93        |
| 3.7.1     | Matrici tridiagonali . . . . .  | 95        |
| 3.7.2     | Aspetti computazionali . . . . .  | 96        |
| 3.8       | Sistemi a blocchi . . . . .   | 98        |
| 3.8.1     | Fattorizzazione LU a blocchi . . . . .  | 99        |
| 3.8.2     | Inversa di una matrice a blocchi . . . . .  | 99        |
| 3.8.3     | Sistemi tridiagonali a blocchi . . . . .  | 100       |
| 3.9       | Accuratezza della soluzione generata dal MEG . . . . .                                | 102       |
| 3.10      | Calcolo approssimato di $K(A)$ . . . . .  | 104       |
| 3.11      | Aumento dell'accuratezza . . . . .  | 106       |
| 3.11.1    | Lo scaling . . . . .  | 106       |
| 3.11.2    | Raffinamento iterativo . . . . .  | 107       |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 3.12      | Sistemi indeterminati . . . . .  | 108        |
| 3.13      | Esercizi . . . . .   | 112        |
| <b>4.</b> | <b>Risoluzione di sistemi lineari con metodi iterativi</b>                     | <b>115</b> |
| 4.1       | Convergenza di metodi iterativi . . . . .                                      | 115        |
| 4.2       | Metodi iterativi lineari . . . . .   | 118        |
| 4.2.1     | I metodi di Jacobi, di Gauss-Seidel e del rilassamento                         | 119        |
| 4.2.2     | Risultati di convergenza per i metodi di Jacobi e di<br>Gauss-Seidel . . . . . | 121        |
| 4.2.3     | Risultati di convergenza per il metodo di<br>rilassamento . . . . .            | 123        |
| 4.2.4     | Il caso delle matrici a blocchi . . . . .                                      | 124        |
| 4.2.5     | Forma simmetrica dei metodi di Gauss-Seidel e SOR                              | 125        |
| 4.2.6     | Aspetti implementativi . . . . .   | 126        |
| 4.3       | Metodi di Richardson stazionari e non stazionari . . . . .                     | 128        |
| 4.3.1     | Analisi di convergenza per il metodo di Richardson .                           | 129        |
| 4.3.2     | Matrici di preconditionamento . . . . .  | 131        |
| 4.3.3     | Il metodo del gradiente . . . . .  | 139        |
| 4.3.4     | Il metodo del gradiente coniugato . . . . .                                    | 143        |
| 4.3.5     | Il metodo del gradiente coniugato preconditionato .                            | 148        |
| 4.4       | Metodi basati su iterazioni in sottospazi di Krylov . . . . .                  | 150        |
| 4.4.1     | Il metodo di Arnoldi per sistemi lineari . . . . .                             | 154        |
| 4.4.2     | Il metodo GMRES . . . . .  | 156        |
| 4.5       | Criteri di arresto per metodi iterativi . . . . .                              | 159        |
| 4.5.1     | Un criterio basato sul controllo dell'incremento . . .                         | 160        |
| 4.5.2     | Un criterio basato sul controllo del residuo . . . . .                         | 161        |
| 4.6       | Esercizi . . . . .   | 162        |
| <b>5.</b> | <b>Approssimazione di autovalori e autovettori</b>                             | <b>165</b> |
| 5.1       | Localizzazione geometrica degli autovalori . . . . .                           | 165        |
| 5.2       | Analisi di stabilità e condizionamento . . . . .                               | 168        |
| 5.2.1     | Stime a priori . . . . .   | 168        |
| 5.2.2     | Stime a posteriori . . . . .   | 172        |
| 5.3       | Il metodo delle potenze . . . . .  | 174        |
| 5.3.1     | Calcolo dell'autovalore di modulo massimo . . . . .                            | 174        |
| 5.3.2     | Calcolo dell'autovalore di modulo minimo . . . . .                             | 178        |
| 5.3.3     | Aspetti computazionali e di implementazione . . . . .                          | 179        |
| 5.4       | Metodi basati sulle iterazioni QR . . . . .                                    | 184        |
| 5.5       | L'iterazione QR nella sua forma di base . . . . .                              | 185        |
| 5.6       | Il metodo QR per matrici in forma di Hessenberg . . . . .                      | 187        |
| 5.6.1     | Matrici di trasformazione di Householder e di Givens                           | 188        |
| 5.6.2     | Riduzione di una matrice in forma di Hessenberg . .                            | 191        |
| 5.6.3     | Fattorizzazione QR di una matrice in forma di<br>Hessenberg . . . . .          | 193        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 5.6.4     | Aspetti implementativi del metodo Hessenberg-QR . . . . .   | 194        |
| 5.6.5     | Implementazione delle matrici di trasformazione . . . . .   | 197        |
| 5.6.6     | Il metodo QR con shift . . . . .  | 200        |
| 5.7       | Metodi per il calcolo di autovalori di matrici simmetriche . . . . .                              | 203        |
| 5.7.1     | Il metodo di Jacobi . . . . .   | 203        |
| 5.7.2     | Il metodo delle successioni di Sturm . . . . .  | 207        |
| 5.8       | Esercizi . . . . .  | 212        |
| <b>6.</b> | <b>Risoluzione di equazioni e sistemi non lineari</b>   | <b>215</b> |
| 6.1       | Condizionamento di un'equazione non lineare . . . . .   | 216        |
| 6.2       | Un approccio geometrico per la ricerca delle radici . . . . .                                     | 218        |
| 6.2.1     | Il metodo di bisezione . . . . .  | 219        |
| 6.2.2     | I metodi delle corde, secanti, Regula Falsi e Newton . . . . .                                    | 221        |
| 6.3       | Il metodo delle iterazioni di punto fisso . . . . .   | 228        |
| 6.3.1     | Risultati di convergenza per alcuni metodi di punto<br>fisso . . . . .                            | 232        |
| 6.4       | Radici di polinomi algebrici . . . . .  | 233        |
| 6.4.1     | Il metodo di Horner e la deflazione . . . . .   | 233        |
| 6.4.2     | Il metodo di Newton-Horner . . . . .  | 235        |
| 6.4.3     | Il metodo di Muller . . . . .   | 238        |
| 6.5       | Criteri d'arresto . . . . .   | 242        |
| 6.6       | Tecniche di post-processing per metodi iterativi . . . . .  | 244        |
| 6.6.1     | La tecnica di accelerazione di Aitken . . . . .   | 245        |
| 6.6.2     | Tecniche per il trattamento di radici multiple . . . . .  | 248        |
| 6.7       | Risoluzione di sistemi di equazioni non lineari . . . . .   | 250        |
| 6.7.1     | Il metodo di Newton e le sue varianti . . . . .   | 250        |
| 6.7.2     | Metodi di Newton modificati . . . . .   | 252        |
| 6.7.3     | Metodi quasi-Newton e metodi ibridi o poli-algoritmi . . . . .                                    | 256        |
| 6.7.4     | Metodi quasi-Newton di tipo secanti . . . . .   | 256        |
| 6.7.5     | Metodi di punto fisso . . . . .   | 259        |
| 6.8       | Esercizi . . . . .  | 262        |
| <b>7.</b> | <b>Interpolazione polinomiale</b>   | <b>265</b> |
| 7.1       | Interpolazione polinomiale di Lagrange . . . . .  | 265        |
| 7.1.1     | L'errore di interpolazione . . . . .  | 267        |
| 7.1.2     | Limiti dell'interpolazione polinomiale su nodi<br>equispaziati e controesempio di Runge . . . . . | 268        |
| 7.1.3     | Stabilità dell'interpolazione polinomiale . . . . .   | 270        |
| 7.2       | Forma di Newton del polinomio interpolatore . . . . .   | 271        |
| 7.2.1     | Alcune proprietà delle differenze divise di Newton . . . . .                                      | 273        |
| 7.2.2     | L'errore di interpolazione usando le differenze divise . . . . .                                  | 276        |
| 7.3       | Interpolazione composta di Lagrange . . . . .   | 277        |
| 7.4       | Interpolazione di Hermite . . . . .   | 277        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 7.5       | L'estensione al caso bidimensionale . . . . .                               | 280        |
| 7.5.1     | Interpolazione polinomiale semplice . . . . .                               | 280        |
| 7.5.2     | Interpolazione polinomiale composita . . . . .                              | 281        |
| 7.6       | Funzioni spline . . . . .   | 285        |
| 7.6.1     | Spline cubiche interpolatorie . . . . .                                     | 286        |
| 7.6.2     | B-spline . . . . .  | 291        |
| 7.7       | Curve spline di tipo parametrico . . . . .                                  | 294        |
| 7.8       | Esercizi . . . . .  | 296        |
| <b>8.</b> | <b>Integrazione numerica</b>  | <b>299</b> |
| 8.1       | Formule di quadratura interpolatorie . . . . .                              | 300        |
| 8.1.1     | La formula del punto medio o del rettangolo . . . . .                       | 301        |
| 8.1.2     | La formula del trapezio . . . . .   | 303        |
| 8.1.3     | La formula di Cavalieri-Simpson . . . . .                                   | 305        |
| 8.2       | Formule di Newton-Cotes . . . . .   | 306        |
| 8.3       | Formule di Newton-Cotes composite . . . . .                                 | 313        |
| 8.4       | L'estrapolazione di Richardson . . . . .                                    | 315        |
| 8.4.1     | Il metodo di integrazione di Romberg . . . . .                              | 317        |
| 8.5       | Integrazione automatica . . . . .   | 319        |
| 8.5.1     | Algoritmi di integrazione non adattivi . . . . .                            | 320        |
| 8.5.2     | Algoritmi di integrazione adattivi . . . . .                                | 322        |
| 8.6       | Estensioni . . . . .  | 326        |
| 8.6.1     | Integrali di funzioni con discontinuità di tipo salto . . . . .             | 326        |
| 8.6.2     | Integrali di funzioni illimitate su intervalli limitati . . . . .           | 327        |
| 8.6.3     | Integrali su intervalli illimitati . . . . .                                | 329        |
| 8.7       | Integrazione numerica in più dimensioni . . . . .                           | 331        |
| 8.7.1     | Il metodo della formula di riduzione . . . . .                              | 331        |
| 8.7.2     | Quadrature composite bidimensionali . . . . .                               | 333        |
| 8.8       | Esercizi . . . . .  | 336        |
| <b>9.</b> | <b>I polinomi ortogonali nella teoria dell'approssimazione</b>              | <b>339</b> |
| 9.1       | Approssimazione di funzioni con serie generalizzate di<br>Fourier . . . . . | 339        |
| 9.1.1     | I polinomi di Chebyshev . . . . .   | 341        |
| 9.1.2     | I polinomi di Legendre . . . . .  | 342        |
| 9.2       | Integrazione ed interpolazione Gaussiana . . . . .                          | 343        |
| 9.3       | Integrazione ed interpolazione con nodi di Chebyshev . . . . .              | 347        |
| 9.4       | Integrazione ed interpolazione con nodi di Legendre . . . . .               | 351        |
| 9.5       | Integrazione Gaussiana su intervalli illimitati . . . . .                   | 353        |
| 9.6       | Programmi per l'implementazione delle formule Gaussiane . . . . .           | 355        |
| 9.7       | Approssimazione di una funzione nel senso dei minimi<br>quadrati . . . . .  | 357        |
| 9.7.1     | I minimi quadrati discreti . . . . .  | 357        |
| 9.8       | Il polinomio di migliore approssimazione . . . . .                          | 360        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 9.9        | I polinomi trigonometrici di Fourier . . . . .                                 | 361        |
| 9.9.1      | La trasformata rapida di Fourier . . . . .                                     | 366        |
| 9.10       | Approssimazione delle derivate di una funzione . . . . .                       | 368        |
| 9.10.1     | Metodi alle differenze finite classiche . . . . .                              | 369        |
| 9.10.2     | Differenze finite compatte . . . . .   | 371        |
| 9.10.3     | La derivata pseudo-spettrale . . . . .   | 374        |
| 9.11       | Esercizi . . . . .   | 375        |
| <b>10.</b> | <b>Risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie</b>               | <b>377</b> |
| 10.1       | Il problema di Cauchy . . . . .  | 377        |
| 10.2       | Metodi numerici ad un passo . . . . .  | 380        |
| 10.3       | Analisi dei metodi ad un passo . . . . .                                       | 382        |
| 10.3.1     | La zero-stabilità . . . . .  | 383        |
| 10.3.2     | Analisi di convergenza . . . . .   | 385        |
| 10.3.3     | L'assoluta stabilità . . . . .   | 388        |
| 10.4       | Le equazioni alle differenze . . . . .   | 391        |
| 10.5       | I metodi a più passi (o multistep) . . . . .                                   | 396        |
| 10.5.1     | I metodi di Adams . . . . .  | 400        |
| 10.5.2     | I metodi BDF . . . . .   | 402        |
| 10.6       | Analisi dei metodi multistep . . . . .   | 402        |
| 10.6.1     | Consistenza . . . . .  | 403        |
| 10.6.2     | Le condizioni delle radici . . . . .   | 404        |
| 10.6.3     | Analisi di stabilità e di convergenza per i metodi multistep . . . . .         | 405        |
| 10.6.4     | L'assoluta stabilità nei metodi multistep . . . . .                            | 407        |
| 10.7       | Metodi predictor-corrector . . . . .   | 410        |
| 10.8       | Metodi Runge-Kutta . . . . .   | 417        |
| 10.8.1     | Derivazione di un metodo Runge-Kutta esplicito . . . . .                       | 420        |
| 10.8.2     | Adattività del passo per i metodi Runge-Kutta . . . . .                        | 420        |
| 10.8.3     | Regioni di assoluta stabilità per i metodi Runge-Kutta . . . . .               | 423        |
| 10.9       | Il caso dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie . . . . .             | 424        |
| 10.10      | I problemi stiff . . . . .   | 426        |
| 10.11      | Esercizi . . . . .   | 428        |
| <b>11.</b> | <b>Approssimazione di problemi ai limiti</b>                                   | <b>433</b> |
| 11.1       | Un problema modello . . . . .  | 433        |
| 11.2       | Il metodo delle differenze finite . . . . .                                    | 435        |
| 11.2.1     | Analisi di stabilità con il metodo dell'energia . . . . .                      | 436        |
| 11.2.2     | Analisi di convergenza . . . . .   | 440        |
| 11.2.3     | Le differenze finite per problemi ai limiti a coefficienti variabili . . . . . | 441        |
| 11.3       | Il metodo di Galerkin . . . . .  | 442        |
| 11.3.1     | Formulazione debole di problemi ai limiti . . . . .                            | 442        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 11.3.2     | Una breve introduzione alle distribuzioni . . . . .                            | 444        |
| 11.3.3     | Proprietà del metodo di Galerkin . . . . .                                     | 446        |
| 11.3.4     | Analisi del metodo di Galerkin . . . . .                                       | 447        |
| 11.3.5     | Il metodo degli elementi finiti . . . . .                                      | 449        |
| 11.3.6     | Aspetti implementativi . . . . .   | 454        |
| 11.4       | Problemi di diffusione-trasporto a trasporto dominante . . .                   | 457        |
| 11.5       | Esercizi . . . . .   | 463        |
| <b>12.</b> | <b>Problemi ai valori iniziali e ai limiti di tipo parabolico e iperbolico</b> | <b>465</b> |
| 12.1       | L'equazione del calore . . . . .   | 465        |
| 12.2       | Approssimazione a differenze finite dell'equazione del calore                  | 468        |
| 12.3       | Approssimazione ad elementi finiti dell'equazione del calore                   | 470        |
| 12.3.1     | Analisi di stabilità per il $\theta$ -metodo . . . . .                         | 472        |
| 12.4       | Metodi a elementi finiti spazio-temporali per l'equazione del calore . . . . . | 478        |
| 12.5       | Equazioni iperboliche: un problema di trasporto scalare . .                    | 482        |
| 12.6       | Sistemi di equazioni iperboliche lineari . . . . .                             | 484        |
| 12.6.1     | L'equazione delle onde . . . . .   | 486        |
| 12.7       | Il metodo delle differenze finite per equazioni iperboliche . .                | 487        |
| 12.7.1     | Discretizzazione dell'equazione scalare . . . . .                              | 488        |
| 12.8       | Analisi dei metodi alle differenze finite . . . . .                            | 490        |
| 12.8.1     | Consistenza . . . . .  | 490        |
| 12.8.2     | Stabilità . . . . .  | 491        |
| 12.8.3     | La condizione CFL . . . . .  | 491        |
| 12.8.4     | Analisi di stabilità alla von Neumann . . . . .                                | 494        |
| 12.9       | Dissipazione e dispersione . . . . .   | 497        |
| 12.10      | Approssimazione ad elementi finiti di equazioni iperboliche                    | 502        |
| 12.10.1    | Discretizzazione spaziale con elementi finiti continui e discontinui . . . . . | 502        |
| 12.10.2    | Discretizzazione temporale . . . . .   | 505        |
| 12.11      | Esercizi . . . . .   | 508        |
|            | <b>Riferimenti bibliografici</b>   | <b>511</b> |
|            | <b>Indice dei programmi MATLAB</b>   | <b>519</b> |
|            | <b>Indice analitico</b>  | <b>523</b> |



<http://www.springer.com/978-88-470-5643-5>

Matematica Numerica

Quarteroni, A.; Sacco, R.; Saleri, F.; Gervasio, P.

2014, XVIII, 542 pagg., Softcover

ISBN: 978-88-470-5643-5