

Indice

I	Strutture	1
1	Insiemi e numeri	3
1.1	Insiemi	3
1.1.1	Sottoinsiemi	3
1.1.2	Operazioni	5
1.1.3	Proprietà delle operazioni	9
1.2	Numeri: introduzione intuitiva	11
1.3	Struttura d'ordine di \mathbb{R}	17
1.3.1	Massimi e minimi	19
1.3.2	Estremi superiore e inferiore	21
1.3.3	Densità	23
1.4	Potenze e logaritmi	25
1.4.1	Potenze	25
1.4.2	Logaritmi	26
1.5	La retta reale estesa	28
1.6	Postilla: la nascita del metodo deduttivo	31
2	Struttura cartesiana e \mathbb{R}^n	33
2.1	Prodotti cartesiani e \mathbb{R}^n	33
2.2	Operazioni in \mathbb{R}^n	37
2.3	Struttura d'ordine in \mathbb{R}^n	40
2.4	Applicazioni	43
2.4.1	Scelte statiche	43
2.4.2	Scelte intertemporali	43
2.5	Ottimi paretiani	44
2.5.1	Definizione	44
2.5.2	Massimi e massimali	45
2.5.3	Frontiera paretiana e scatola di Edgeworth	47
2.5.4	Postilla debole	51
3	Struttura lineare	55
3.1	Sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n	55
3.2	Indipendenza e dipendenza lineari	58
3.3	Combinazioni lineari	60

3.4	Sottospazi generati	62
3.5	Basi	64
3.6	Basi di sottospazi	69
4	Struttura euclidea	71
4.1	Valore assoluto e norma	71
4.1.1	Prodotto interno	71
4.1.2	Valore assoluto	71
4.1.3	Norma	72
4.2	Ortogonalità	77
5	Struttura topologica	83
5.1	Distanze	83
5.2	Intorni	86
5.3	Tassonomia dei punti di \mathbb{R}^n rispetto a un insieme	89
5.3.1	Punti interni e di frontiera	89
5.3.2	Punti di accumulazione	92
5.4	Insiemi aperti e chiusi	95
5.5	Stabilità insiemistica	101
5.6	Insiemi compatti	102
5.7	Chiusura e convergenza	104
II	Funzioni	107
6	Funzioni	109
6.1	Il concetto	109
6.2	Applicazioni	121
6.2.1	Scelte statiche	121
6.2.2	Scelte intertemporali	123
6.3	Proprietà generali	124
6.3.1	Controimmagini e curve di livello	124
6.3.2	Algebra delle funzioni	131
6.3.3	Composizione	132
6.4	Classi di funzioni	133
6.4.1	Funzioni iniettive, suriettive e biettive	133
6.4.2	Funzioni inverse	136
6.4.3	Funzioni limitate	138
6.4.4	Funzioni monotone	140
6.4.5	Funzioni concave e convesse (anteprima)	146
6.4.6	Funzioni separabili	147
6.5	Funzioni elementari su \mathbb{R}	148
6.5.1	Funzioni polinomiali	148
6.5.2	Funzioni esponenziali e logaritmiche	149
6.5.3	Funzioni trigonometriche e periodiche	151
6.6	Massimi e minimi di funzione (anteprima)	157

6.7	Domini e restrizioni	159
6.8	Gran finale: preferenze e utilità	161
6.8.1	Preferenze	161
6.8.2	Utilità Paretiana	164
6.8.3	Esistenza e preferenza lessicografica	165
7	Cardinalità	169
7.1	Infinito attuale e potenziale	169
7.2	Funzioni biettive e cardinalità	170
7.3	Un vaso di Pandora	176
8	Successioni	179
8.1	Il concetto	179
8.2	Lo spazio delle successioni	182
8.3	Applicazione: scelte intertemporali	184
8.4	Immagini e classi di successioni	184
8.5	Limiti: esempi introduttivi	187
8.6	Limiti e comportamento asintotico	187
8.6.1	Convergenza	188
8.6.2	Limiti per eccesso e per difetto	190
8.6.3	Divergenza	191
8.6.4	Topologia di $\overline{\mathbb{R}}$ e definizione generale di limite	192
8.7	Proprietà dei limiti	194
8.7.1	Monotonia e convergenza	196
8.7.2	Il Teorema di Bolzano-Weierstrass	197
8.8	Algebra dei limiti e limiti notevoli	201
8.8.1	Le (molte) certezze	201
8.8.2	Alcuni limiti notevoli	204
8.8.3	Forme di indeterminazione per i limiti	205
8.8.4	Tabelle riassuntive	208
8.8.5	Ma quante sono le forme di indeterminazione?	209
8.9	Criteri di convergenza	210
8.10	La condizione di Cauchy	214
8.11	Il numero di Nepero	216
8.12	Ordini di convergenza e di divergenza	220
8.12.1	Generalità	220
8.12.2	Algebra dell'ò piccolo	223
8.12.3	Equivalenza asintotica	224
8.12.4	Terminologia	228
8.12.5	Scale di infiniti	228
8.13	Successioni in \mathbb{R}^n	230

9 Serie numeriche	233
9.1 Il concetto	233
9.1.1 Tre classiche serie	235
9.1.2 Utilità intertemporale con orizzonte infinito	237
9.2 Proprietà elementari	237
9.3 Serie con termini positivi	238
9.3.1 Criterio di convergenza del confronto	238
9.3.2 Criterio di convergenza del rapporto: preludio	242
9.3.3 Criterio di convergenza del rapporto	243
9.3.4 Criterio di convergenza della radice	245
9.3.5 Un primo sviluppo in serie	245
9.4 Serie con termini di segno qualsiasi	247
9.4.1 Convergenza assoluta	247
9.4.2 Serie con i segni alternati	249
10 Limiti di funzioni	251
10.1 Esempi introduttivi	251
10.2 Funzioni scalari	256
10.2.1 Limiti bilaterali	256
10.2.2 Limiti unilaterali	261
10.2.3 Relazioni tra limiti unilaterali e bilaterali	264
10.2.4 Gran finale	265
10.2.5 Asintoti orizzontali e verticali	266
10.3 Funzioni di più variabili	267
10.4 Proprietà dei limiti	270
10.5 Algebra dei limiti	275
10.5.1 Forme di indeterminazione per i limiti	277
10.6 Limiti elementari e limiti notevoli	278
10.6.1 Limiti elementari	278
10.6.2 Limiti notevoli	279
10.7 Ordini di convergenza e di divergenza	281
10.7.1 Algebra dell'ò piccolo	283
10.7.2 Equivalenza asintotica	285
10.7.3 Terminologia	287
10.7.4 Il solito bestiario	288
11 Funzioni continue	289
11.1 Generalità	289
11.2 Discontinuità	294
11.3 Operazioni e composizione	297
11.4 Zeri ed equilibri	298
11.4.1 Zeri	298
11.4.2 Equilibri	300
11.5 Teorema di Weierstrass (anteprima)	302
11.6 Teorema dei valori intermedi	304
11.7 Limiti e continuità degli operatori	306

11.8	Continuità uniforme	308
III	Analisi lineare e non lineare	311
12	Funzioni e operatori lineari	313
12.1	Funzioni lineari	313
12.1.1	Definizione e prime proprietà	313
12.1.2	Rappresentazione	315
12.2	Matrici	316
12.2.1	Operazioni tra matrici	318
12.2.2	Prodotto di matrici	321
12.3	Operatori lineari	325
12.3.1	Definizione e prime proprietà	325
12.3.2	Rappresentazione	327
12.3.3	Matrici e operazioni	329
12.4	Rango	331
12.4.1	Operatori lineari	331
12.4.2	Rango di matrici	334
12.4.3	Proprietà	337
12.4.4	Procedimento gaussiano di eliminazione	340
12.5	Operatori invertibili	344
12.5.1	Invertibilità	344
12.5.2	Matrice inversa	345
12.6	Determinanti	346
12.6.1	Definizione	346
12.6.2	Proprietà	351
12.6.3	Teorema di Laplace	356
12.6.4	Inverse e determinanti	361
12.6.5	Algoritmo di Kronecker	364
12.7	Sistemi lineari quadrati	366
12.8	Sistemi lineari generali	370
12.9	Risoluzione di sistemi: metodo di Cramer	374
13	Funzioni concave	379
13.1	Insiemi convessi	379
13.2	Funzioni concave	381
13.3	Proprietà	386
13.3.1	Funzioni concave e insiemi convessi	386
13.3.2	Disuguaglianza di Jensen e continuità	390
13.4	Funzioni quasi concave	392
13.5	Principio di diversificazione	397
13.6	Gran finale: l'equazione di Cauchy	400
13.6.1	Varianti notevoli	402
13.6.2	Capitalizzazione	404

14 Problemi di ottimo	407
14.1 Generalità	407
14.1.1 La fortuna del principiante	412
14.1.2 Proprietà	415
14.1.3 Consumo e produzione	417
14.2 Esistenza: Teorema di Weierstrass	423
14.2.1 Enunciato	423
14.2.2 Dimostrazione 1	424
14.2.3 Dimostrazione 2	425
14.3 Estremi locali	426
14.4 Concavità e quasi concavità	430
IV Calcolo differenziale	435
15 Derivate	437
15.1 Definizione	437
15.1.1 Osservazioni	439
15.2 Interpretazione geometrica	440
15.3 Funzione derivata	445
15.4 Derivate unilaterali	446
15.5 Derivabilità e continuità	449
15.6 Derivate delle funzioni elementari	451
15.7 Algebra delle derivate	453
15.8 La regola della catena	457
15.9 Derivata di funzioni inverse	459
15.10 Formulario	462
15.11 Differenziabilità e linearità	463
15.11.1 Differenziale	463
15.11.2 Differenziabilità e derivabilità	465
15.11.3 Differenziabilità e continuità	467
15.12 Derivate di ordine superiore	467
16 Derivazione parziale	469
16.1 Generalità	469
16.1.1 Operatore derivata	477
16.1.2 Ceteris paribus: utilità e produttività marginali	478
16.2 Differenziale	479
16.2.1 Differenziabilità e derivabilità	482
16.2.2 Differenziale totale	484
16.3 Regola della catena	485
16.4 Derivate parziali di ordine superiore	488
16.5 Funzioni implicite	492
16.5.1 Teorema di Dini	492
16.5.2 Curve di livello e saggi marginali	497

17 Metodi differenziali	501
17.1 Estremi e punti critici	501
17.1.1 Preambolo	501
17.1.2 Teorema di Fermat	502
17.1.3 Ottimi liberi: incipit	506
17.2 Teorema del valor medio	507
17.3 Proprietà di continuità della derivata	510
17.4 Monotonia e derivabilità	513
17.5 Condizioni sufficienti per estremi	518
17.5.1 Estremi locali	518
17.5.2 Ricerca di estremi locali	520
17.5.3 Ottimi liberi: caso scalare	522
17.5.4 Estremi globali	525
17.6 Teorema e regola di de l'Hospital	525
17.6.1 Forme di indeterminazione $0/0$ e ∞/∞	525
17.6.2 Altre forme di indeterminazione	529
18 Approssimazione	531
18.1 Approssimazione polinomiale di Taylor	531
18.1.1 Sviluppi polinomiali	531
18.1.2 Teorema di Taylor	533
18.1.3 Taylor e limiti	538
18.2 Proposizione <i>omnibus</i> per estremi locali	539
18.3 Procedura <i>omnibus</i> di ricerca di estremi locali	542
18.3.1 Caso di funzioni due volte derivabili	542
18.3.2 Caso di funzioni derivabili infinite volte	543
18.4 Sviluppo di Taylor: caso vettoriale	544
18.4.1 Forme quadratiche	544
18.4.2 Sviluppo di Taylor	548
18.4.3 Condizioni del secondo ordine	549
18.4.4 Ottimi liberi: caso vettoriale	554
19 Concavità e differenziabilità	557
19.1 Caso scalare	557
19.1.1 Corde e tangenti	566
19.2 Caso vettoriale: cenni	568
19.3 Condizione del primo ordine (anteprima)	569
19.4 Ottimizzazione concava (anteprima)	571
20 Studio di funzioni	573
20.1 Flessi	573
20.2 Asintoti	575
20.3 Studio di funzioni	580

21 Ottimizzazione locale vincolata	587
21.1 Introduzione	587
21.2 Il problema	588
21.3 Un vincolo	588
21.4 Metodo di Lagrange	594
21.5 Problema del consumatore	598
V Integrazione	603
22 Integrale secondo Riemann	605
22.1 Plurirettangoli	606
22.2 Definizione	608
22.2.1 Funzioni positive	608
22.2.2 Funzioni di segno qualsiasi	614
22.2.3 Tutto si tiene	616
22.3 Criteri di integrabilità	618
22.4 Classi di funzioni integrabili	622
22.4.1 Funzioni a scala	623
22.4.2 Approccio analitico e approccio geometrico	626
22.4.3 Funzioni continue e funzioni monotone	627
22.5 Proprietà dell'integrale	629
22.6 Teorema fondamentale del Calcolo integrale	637
22.6.1 Funzioni primitive	637
22.6.2 Formulario	640
22.6.3 Il Primo Teorema fondamentale del calcolo integrale	641
22.6.4 Il Secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale	643
22.7 Proprietà dell'integrale indefinito	646
22.8 Cambiamento di variabile	649
22.9 Funzioni integrabili in forma chiusa	653
22.10 Integrali impropri	657
22.10.1 Intervalli illimitati d'integrazione: generalità	657
22.10.2 Intervalli illimitati d'integrazione: proprietà e criteri	665
22.10.3 Integrale di Gauss	669
22.10.4 Funzioni illimitate	671
VI Appendici	673
A Far di conto: Analisi combinatoria	675
A.1 Generalità	675
A.2 Permutazioni	676
A.3 Disposizioni	680
A.4 Combinazioni	681
A.5 Binomio di Newton	683

B	Richiami di trigonometria	685
B.1	Generalità	685
B.2	Concerto d'archi	687
B.3	Perpendicolarità	689
C	Elementi di logica intuitiva	691
C.1	Proposizioni e operazioni	691
C.2	Equivalenza logica	693
C.3	Teoremi e dimostrazioni	695
C.3.1	Generalità	695
C.3.2	Reductio	696
C.3.3	Terminologia	698
C.4	Predicati e quantificatori	698
C.4.1	Generalità	698
C.4.2	Algebra	699
C.4.3	Esempio	700
C.5	Induzione	700